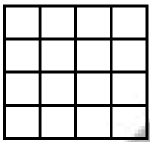
6. RADICALES.

6.1. Raíz cuadrada.

Analicemos los siguientes ejemplos:

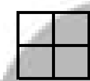
$\boldsymbol{4^2=4\cdot 4=16}$ es una potencia de base ***4*** y exponente ***2***. El resultado, ***16***, es un cuadrado perfecto:



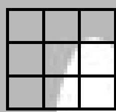
(lo podemos visualizar como el área de un cuadrado de lado ***4***)

Pues bien, diremos que la base de dicha potencia, ***4***, es su raíz cuadrada exacta: $\sqrt{16}=4$.

Análogamente pasaría con $2^2=4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4}=2$:



$3^2=9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9}=3$:



Así pues, podemos definir la *raíz cuadrada* de un número como otro número cuyo cuadrado es igual al primero: $\sqrt{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^2=a$. Además, podemos definir un *número cuadrado perfecto* como aquel que tiene raíz cuadrada exacta.

Observa:

$1^2=1$, $31^2=961$, $71^2=5041$,... y $9^2=81$, $29^2=841$,...

- Terminan en ***1*** los cuadrados de los números terminados en ***1*** o en ***9***.

  $2^2=4$, $12^2=144$, $32^2=1024$,... y $8^2=64$, $38^2=1444$,...
- Terminan en ***4*** los cuadrados de los números terminados en ***2*** o en ***8***.

  $25^2=625$, $125^2=15625$, $95^2=9025$,...
- Terminan en ***5*** los cuadrados de los números terminados en ***5***.

  $4^2=16$, $54^2=2196$, $124^2=15376$,... y $6^2=36$, $76^2=5776$,...
- Terminan en ***6*** los cuadrados de los números terminados en ***4*** o en ***6***.

  $3^2=9$, $43^2=1849$, $93^2=8649$,... y $7^2=49$, $57^2=3249$,...
- Terminan en ***9*** los cuadrados de los números terminados en ***3*** o en ***7***.

  $10^2=100$, $70^2=4900$, $90^2=8100$,...
- Terminan en ***0*** los cuadrados de los números terminados en ***0***.

Por tanto, un cuadrado perfecto sólo puede terminar en ***0***,***1***,***4***,***5***,***6***,***9***.

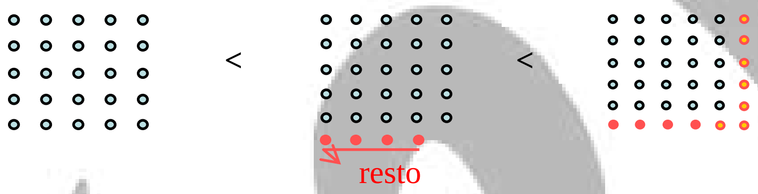
Sin embargo, existen muchos números que no son cuadrados perfectos: ***42***, ***31***, ***119***,... Por tanto, no representan un cuadrado ni tienen raíz cuadrada exacta. Ahora bien:

$6^2=36<42<49=7^2 \quad ; \quad 3^2=9<14<16=4^2 \quad ; \quad 10^2=100<119<121=11^2 \quad ; \quad ...$

En el primer caso, ***6*** es el mayor número cuyo cuadrado es menor que ***42***, en el segundo caso ***3*** es el mayor número cuyo cuadrado es menor que ***14***, etc. Decimos que ***6*** es la raíz entera de ***42***, ***3*** es la raíz entera de ***14***,... Además, como $\boldsymbol{42-6^2=6}$, se dice que ***6*** es el resto de la raíz cuadrada entera de ***42***. Análogamente, $\boldsymbol{14-3^2=5}$ es el resto de la raíz cuadrada entera de ***14***, $\boldsymbol{119-10^2=19}$ es el resto de la raíz cuadrada entera de ***119***,...

Podemos así definir la *raíz cuadrada entera* de un número como el mayor número entero cuyo cuadrado es menor que dicho número, y el *resto de la raíz cuadrada* de un número como la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz entera:

$5^2 = 25 < 29 < 6^2 = 36$:



Por último veamos, en el siguiente ejemplo, cuál es el algoritmo (o conjunto de procedimientos) que nos permite calcular una raíz cuadrada:

$\sqrt{11\ 85\ 27}$	**3 4 4**
–9	**64 · 4**
2 85	
–2 56	**684 · 4 = 2736**
2927	
–27 36	
191	

1) Hacemos grupos de dos cifras, de derecha a izquierda en la parte entera y de izquierda a derecha en la parte decimal, completando con ceros si el último grupo queda con una sola cifra (el nº de grupos formados en la parte entera indica el nº de cifras que tendrá el resultado).

2) Se busca un nº que elevado al cuadrado sea menor o igual que el primer grupo (11), que es 3.

3) Se hace el cuadrado de 3 (9) y se resta al primer grupo (11), y da 2.

4) Se baja el segundo grupo de cifras (85) y obtenemos 285; a la vez, se baja el doble de 3 (6) y se busca añadirle una cifra (6d), de modo que (6d·d) dé un número lo más próximo a 285, sin superarlo, que es **4**, cifra que colocamos al lado del **3** (y obtenemos 34).

5) A 285 le restamos el nº obtenido (256), y da 29.

6) Repetimos el proceso igual que en el paso 4: se baja el tercer grupo de cifras (27) y obtenemos 2927; a la vez, se baja el doble de 34 (68) y se busca añadirle una cifra (68d), de modo que (68d·d) dé un número lo más próximo a 2927, sin superarlo, que es **4**, cifra que colocamos al lado del 34 (y obtenemos 344).

7) A 2927 le restamos el nº obtenido (2736), y da 191.

8) Como no hay más bloques que bajar, ya hemos calculado la raíz entera de 118.527, que es 344, y el resto, que es 191:

118527 = (344)² +191.

9) Como no es exacta, podemos sacar decimales bajando un grupo de dos ceros (00), colocando una coma de decimal en el resultado (344') y repitiendo otra vez todo el proceso, teniendo en cuenta que cada vez que bajamos el doble del resultado que estamos obteniendo, lo hacemos sin tener en cuenta la coma del decimal.

Ejercicio: Completa la siguiente tabla.

	$\sqrt{37449}$	$\sqrt{20058}$	$\sqrt{72049}$	$\sqrt{12121}$	$\sqrt{87654}$	$\sqrt{54321}$	$\sqrt{92754}$	$\sqrt{37449}$
Raíz								
Resto								

6.2. Generalización del concepto de raíz.

(A) Si en vez de un número que elevado al cuadrado nos dé otro, buscamos uno que elevado al cubo o a la cuarta o a la quinta, etc. proporcione otro número, obtenemos el concepto de raíz cúbica, cuarta, quinta, etc. Así:

$\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

$\sqrt[4]{256} = 4$ porque $4^4 = 256$

$\sqrt[8]{128} = 2$ porque $2^7 = 128$

$\sqrt[6]{-729} = ???$ porque no hay un nº real que elevado a la sexta dé negativo

Así pues, la *raíz de índice **n** de un número **a*** (o *radical de índice **n***) será otro número ***b*** tal que elevado a ***n*** nos da ***a***:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad donde \begin{cases} \sqrt[n]{a} & \textbf{radical} \\ a & \textbf{radicando} \\ n \in \mathbb{N} - \{0\} & \textbf{índice} \\ b & \textbf{raíz} \end{cases}$$

(B) *Ejemplos:* índice $\leftarrow$ $\sqrt[5]{16a^2m}$ $\rightarrow$ signo radical

radicando

$\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{4a^2} = 2a$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{64m^3} = 4m$; *etc.*

Por tanto, si la raíz es exacta tenemos una cantidad racional.

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3a}$; $\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[3]{3a^2}$; *etc.*

Por tanto, si la raíz es inexacta tenemos una cantidad irracional o radical propiamente dicha.

NOTA IMPORTANTE:

* *Si* $a \geq 0$, *siempre existe* $b = \sqrt[n]{a}$, *en cuyo caso,* $b \geq 0$.

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{32} = 2$

* *Si* $a < 0$, *sólo existe* $b = \sqrt[n]{a}$ *si n es impar, en cuyo caso* $b < 0$.

$\sqrt{-49} \notin \mathbb{R}$; $\sqrt[3]{-125} = -5$; $\sqrt[4]{-81} \notin \mathbb{R}$; $\sqrt[5]{-32} = -2$

Por desgracia, no existe ningún algoritmo similar al que hay para las raíces cuadradas que permita obtener, a mano, el resultado de una raíz cúbica o cuarta o quinta, etc. De momento, la única forma de hacerlo sería utilizando la calculadora, que tiene implantado un programa que le permite realizar cualquier raíz de forma aproximada.

6.3. Potencia de exponente racional.

Intentemos resolver la siguiente cuestión: "Calcular un número, cuyo cuadrado sea ***4***".

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{4}\right)^{2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=2\cdot 2=4\\ \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de una}\\ \text{potencia}}}{=}4^{2\cdot\frac{1}{2}}=4^{1}=4\end{array}\right\}\Rightarrow\quad 4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}$$

Por tanto, parece lógico hacer la siguiente definición:

(A) Una *potencia de exponente racional* es igual a un radical cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando todo lo demás, es decir, la base de la potencia elevada al numerador del exponente: $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$.

Queda así de manifiesto la relación que existe entre las raíces y las potencias, de forma que:

- hemos generalizado la definición de potencia, permitiendo que en el exponente aparezca un número racional.
- podemos justificar el hecho de que cualquier raíz debe tener siempre un índice natural (no cero):

  * $\sqrt[-3]{5^{2}}=5^{\frac{2}{-3}}=5^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{5^{-2}}$ (los índices negativos se pueden evitar)

  * $\sqrt[0]{5^{2}}=5^{\frac{2}{0}}=$??? (el índice cero no tiene sentido)

  * $\sqrt[1]{5^{2}}=5^{\frac{2}{1}}=5^{2}$ (si el índice es uno, no es necesario escribir la raíz)

  Así, el primer índice natural que tiene sentido utilizar es el dos y, por ello, no se escribe.

  * $\sqrt[\frac{2}{3}]{5^{7}}=5^{\frac{7}{2/3}}=5^{\frac{7/1}{2/3}}=5^{\frac{21}{2}}=\sqrt{5^{21}}$ (los índices racionales también se pueden evitar)
- como parece lógico pensar que las propiedades de las potencias se van a seguir cumpliendo cuando el exponente es racional (los ejemplos siguientes lo corroboran), éstas nos sirven como un instrumento para operar con raíces, aunque podremos hacerlo sin necesidad de escribir los radicales en forma de potencias, lo cual hará más breve la resolución de dichas operaciones.

$$64^{1/2}\cdot 64^{1/3}=\sqrt{64}\cdot\sqrt[3]{64}=8\cdot 4=32=64^{1/2+1/3}=64^{5/6}=\left(2^{6}\right)^{5/6}=\sqrt[6]{\left(2^{6}\right)^{5}}=\sqrt[6]{2^{30}}=2^{30/6}=2^{5}=32$$

$$9^{1/2}\cdot 16^{1/2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12=\sqrt{144}=\sqrt{9\cdot 16}=(9\cdot 16)^{1/2}$$

$$5^{2/3}\cdot 5^{5/4}=5^{2/3+5/4}=5^{23/12}\quad;\quad(-7)^{3/5}\cdot 9^{3/5}=(-63)^{3/5}\quad;\quad 4^{5/3}:4^{-7/3}=4^{5/3-(-7/3)}=4^{5/3+7/3}=4^{12/3}=4^{4}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{7/2}\right]^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{21/2}\quad;\quad(-5)^{2/11}:\left(\frac{-15}{7}\right)^{2/11}=\left(\frac{7}{3}\right)^{2/11}\quad;\quad\left[\left(\frac{-5}{12}\right)^{13/19}\right]^{0}=1$$

En este punto insistiremos más adelante, cuando analicemos despacio las operaciones con radicales.

(B) *Ejercicios:*

1. Escribir las siguientes potencias en forma de raíz:

POTENCIA	RAÍZ	POTENCIA	RAÍZ	POTENCIA	RAÍZ
$a^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{a^1}$	$b^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{b^3}$	$a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m}$
$7^{3/4}$	$\sqrt[4]{7^3}$	$(-11)^{5/3}$	$\sqrt[3]{(-11)^5}$	$8^{1/5}$	$\sqrt[5]{8}$
$x^{4/3}$	$\sqrt[3]{x^4}$	$5^{\frac{7}{9}}$	$\sqrt[9]{5^7}$	$(a-b)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a-b}$
$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{-1}{2}}$	$\sqrt{6}$	$x^{\frac{2}{5}}\cdot y^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[5]{(x\cdot y)^2}$	$a^{-0,25}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$
$x^{0,5}$	$\sqrt{x}$	$4^{\frac{5}{6}}$	$\sqrt[6]{4^5}$	$(-2)^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{(-2)^2}$
$(a+b)^{\frac{2}{-3}}$	$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a+b}\right)^2}$	$\left(\frac{-2}{3}\right)^{\frac{6}{7}}$	$\sqrt[7]{\left(\frac{-2}{3}\right)^6}$	$a^{\frac{-1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{a}}$
$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{-4}}$	$\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$	$\left(\frac{-1}{4}\right)^{\frac{13}{11}}$	$\sqrt[11]{\left(\frac{-1}{4}\right)^{13}}$	$\left(a^{\frac{-1}{2}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{-1}{6}}$	$\sqrt[12]{a}\cdot\sqrt[9]{\frac{1}{b}}$

2. Escribir las siguientes raíces en forma de potencia de exponente racional:

RAÍZ	POTENCIA	RAÍZ	POTENCIA	RAÍZ	POTENCIA
$\sqrt[5]{a^2}$	$a^{2/5}$	$\sqrt[9]{5^6}$	$5^{2/3}$	$\sqrt{x^2}$	x
$\sqrt[7]{7^{11}}$	$7^{11/7}$	$\sqrt{x^{-4}}$	$x^{-2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2$	$\sqrt[3]{b^{-2}}$	$b^{-2/3}=\left(\frac{1}{b}\right)^{2/3}$
$\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$	$7^{-1/4}=\left(\frac{1}{7}\right)^{1/4}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$	$a^{-5/3}=\left(\frac{1}{a}\right)^{5/3}$	$\left(\sqrt{5}\right)^3$	$5^{3/2}$
$\sqrt[6]{a^2\cdot b^6}$	$a^{1/3}\cdot b$	$\sqrt[3]{a^{-2}\cdot b^{-4}}$	$a^{-2/3}\cdot b^{-4/3}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^{4/3}$	$\sqrt{\left(a\cdot b^2\right)^3}$	$a^{3/2}\cdot b^3$
$\sqrt{8\cdot a^2\cdot 4\cdot b^2}$	$2^{5/2}\cdot a\cdot b$	$\sqrt[7]{\frac{6}{5}}$	$\left(\frac{6}{5}\right)^{1/7}$	$\sqrt[5]{\left(\frac{-2}{3}\right)^4}$	$\left(\frac{-2}{3}\right)^{4/5}$

3. Expresa en forma de una única potencia de exponente positivo:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{4}}$		$25^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{6}}$		$0,25^{\frac{1}{2}} : 0,25^{\frac{1}{4}}$	
$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}$		$b^{2} : b^{-\frac{1}{2}}$		$x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$	
$\sqrt{a} \cdot a^{\frac{-1}{2}}$		$a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$		$\left(a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)$	
$a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^{\frac{3}{2}}}$		$a^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}}$		$a^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[5]{a^{\frac{-2}{3}}}$	
$a^{\frac{-2}{5}} + b^{\frac{-2}{5}}$		$\dfrac{m + m^{-1}}{m - m^{-1}}$		$\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$	

4. Hallar, si es posible, el valor de las siguientes expresiones:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$36^{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$		$32^{\frac{-1}{5}}$	
$\sqrt{-16}$		$16^{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{\dfrac{25}{4}}$	
$0,125^{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{81}$		$512^{\frac{-2}{3}}$	
$\sqrt[4]{-625}$		$\left(\dfrac{121}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[7]{-128}$	
$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{3}{-2}}$		$\sqrt[5]{243}$		$0,0025^{\frac{-3}{2}}$	

5. Calcula si es posible: $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[6]{729}$; $\sqrt[7]{-128}$

6.4. Operaciones con radicales.

(A) <u>SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES</u>:

Existen dos tipos de simplificación de raíces:

$$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7^{2/2} = 7^1 = 7 \quad ; \quad \sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3} = 5^{1+1/3} = 5^1 \cdot 5^{1/3} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[6]{100} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^2} = \left(2^2 \cdot 5^2\right)^{1/6} = 2^{2/6} \cdot 5^{2/6} = 2^{1/3} \cdot 5^{1/3} = \left(2 \cdot 5\right)^{1/3} = \sqrt[3]{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[5]{a^{10} \cdot b^3 \cdot c^{21}} = \left(a^{10} \cdot b^3 \cdot c^{21}\right)^{1/5} = a^{10/5} \cdot b^{3/5} \cdot c^{21/5} = a^2 \cdot b^{3/5} \cdot c^{4+1/5} = a^2 \cdot c^4 \cdot \sqrt[5]{b^3 \cdot c}$$

En los ejemplos anteriores podemos observar que se pueden simplificar las raíces que, puestas en forma de potencia, tienen como exponente una fracción reducible o una fracción mayor que la unidad: ésta es la diferencia entre los dos tipos de simplificación.

a.1.) *Simplificación exponentes-índice*:

$$\sqrt{81}=\sqrt{3^4}=3^{4/2}=3^2=9 \quad ; \quad \sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=5^{2/4}=5^{1/2}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt[6]{36}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}=\left(2^2\cdot 3^2\right)^{1/6}\underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de un}\\ \text{producto}}}{=}2^{2/6}\cdot 3^{2/6}=2^{1/3}\cdot 3^{1/3}\underset{\substack{\text{Producto}\\ \text{de potencias}\\ \text{igual exponente}}}{=}(2\cdot 3)^{1/3}=\sqrt[3]{2\cdot 3}$$

$$\sqrt[5]{a^{10}\cdot b^5\cdot c^{25}}=\left(a^{10}\cdot b^5\cdot c^{25}\right)^{1/5}\underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de un}\\ \text{producto}}}{=}a^{10/5}\cdot b^{5/5}\cdot c^{25/5}=a^2\cdot b\cdot c^5$$

Se pueden simplificar los exponentes y el índice del radical cuando todos se pueden dividir a la vez por el mismo número, en cuyo caso, se realiza dicha división y se escribe la raíz resultante.

Ejercicio:

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$\sqrt{1024}$		$\sqrt[8]{324}$		$\sqrt[4]{729}$	
$\sqrt[5]{3125}$		$\sqrt[4]{100}$		$\sqrt[3]{216}$	
$\sqrt[10]{x^5}$		$\sqrt[24]{y^{16}}$		$\sqrt[60]{x^{45}}$	
$\sqrt[4]{a^4 : b^2}$		$\sqrt[6]{27\cdot x^3\cdot y^3\cdot z^6}$		$\sqrt{9\cdot a^4\cdot b^2\cdot c^{10}}$	
$\sqrt[p]{x^{p\cdot q}}$		$\sqrt[p\cdot q]{x^p}$		$\sqrt[3]{27\cdot a^6\cdot b^9\cdot c^3}$	
$\sqrt[3]{27\cdot\left(b^2-c\right)^6\cdot x^6}$		$\sqrt[5]{\dfrac{-32\cdot x^{10}}{b^{15}}}$		$\sqrt[4]{\dfrac{81\cdot b^8}{16\cdot c^{12}}}$	

Las raíces así obtenidas, se dice que son *radicales equivalentes* y, para obtener radicales equivalentes a uno dado, basta con multiplicar (o dividir) el índice y los exponentes del radicando por un mismo número. Además, utilizando esta propiedad, podemos escribir varios radicales de forma que tengan todos el mismo índice, es decir, podemos *reducir radicales a común índice*:

$$\sqrt[5]{3^2}\ ;\ \sqrt{2^3} \Rightarrow 3^{2/5}\ ;\ 2^{3/2} \underset{\substack{\text{Reducir}\\ \text{fracciones}\\ \text{a común d}^{\text{dor}}}}{\Rightarrow} 3^{4/10}\ ;\ 2^{15/10} \Rightarrow \sqrt[10]{3^4}\ ;\ \sqrt[10]{2^{15}}$$

Para hacerlo directamente, sin pasar a forma de potencia, seguiremos los siguientes pasos:

- Calcular el mcm de los índices (que será el índice común):

$$\sqrt[5]{3^2}\ ;\ \sqrt{2^3} \Rightarrow mcm(2,5)=10$$

- Dividir el índice común entre el índice anterior y elevar el radicando al resultado, o lo que es igual, multiplicar el resultado por el exponente del radicando:

$$\frac{10}{5}=2 \Rightarrow \sqrt[10]{\left(3^2\right)^2} \quad y \quad \frac{10}{2}=5 \Rightarrow \sqrt[10]{\left(2^3\right)^5}. \quad \text{Entonces}: \ \sqrt[10]{3^4} \ ; \ \sqrt[10]{2^{15}}$$

Ejercicio:

RADICALES	SOL.	RADICAL	SOL.
$\sqrt[6]{32} \ ; \ \sqrt[8]{8}$		$\sqrt[3]{35} \ ; \ \sqrt[6]{25}$	
$\sqrt[4]{3^5} \ ; \ \sqrt[7]{5^3}$		$\sqrt[20]{z} \ ; \ \sqrt[35]{z^{12}}$	
$\sqrt{5} \ ; \ \sqrt[4]{3}$		$\sqrt[3]{4} \ ; \ \sqrt[4]{8} \ ; \ \sqrt{3}$	
$\sqrt[3]{5} \ ; \ \sqrt[4]{2} \ ; \ \sqrt{3}$		$\sqrt{2} \ ; \ \sqrt[9]{3} \ ; \ \sqrt[12]{5}$	
$\sqrt[4]{3} \ ; \ \sqrt[3]{7} \ ; \ \sqrt{5}$		$\sqrt{3} \ ; \ \sqrt[6]{32} \ ; \ \sqrt[3]{5}$	
$\sqrt[4]{3} \ ; \ \sqrt[5]{4} \ ; \ \sqrt{15}$		$\sqrt[3]{2} \ ; \ \sqrt[6]{3} \ ; \ \sqrt[9]{9}$	
$\sqrt{2^5} \ ; \ \sqrt[6]{3^2} \ ; \ \sqrt[10]{5^3}$		$\sqrt{7} \ ; \ \sqrt[15]{8^{11}} \ ; \ \sqrt[12]{6^7}$	
$\sqrt{2} \ ; \ \sqrt[3]{3} \ ; \ \sqrt[4]{5} \ ; \ \sqrt[6]{7}$		$\sqrt{x \cdot y^3} \ ; \ \sqrt[3]{x \cdot y^4}$	
$\sqrt[6]{x \cdot y^3} \ ; \ \sqrt[4]{x^2 \cdot y^3}$		$\sqrt[4]{8a^2x^3} \ ; \ \sqrt[6]{3a^5m^4}$	
$\sqrt[3]{14 \cdot a \cdot b^2} \ ; \ \sqrt[4]{7 \cdot a^3 \cdot b^2}$		$\sqrt[3]{3x} \ ; \ \sqrt{5a^2} \ ; \ \sqrt[6]{4m}$	
$\sqrt[8]{x^4} \ ; \ \sqrt[6]{y^4} \ ; \ \sqrt[20]{z^{16}}$		$\sqrt[6]{a^3x^2} \ ; \ \sqrt{2a} \ ; \ \sqrt[3]{3a^2b}$	
$\sqrt[3]{a} \ ; \ \sqrt{2b} \ ; \ \sqrt[4]{5x^2}$		$\sqrt{2m} \ ; \ \sqrt[5]{a^3x^4} \ ; \ \sqrt[10]{x^7y^2}$	
$\sqrt[6]{2y^3} \ ; \ \sqrt[3]{x^2} \ ; \ \sqrt[9]{5m^7}$		$\sqrt[2 \cdot n]{x} \ ; \ \sqrt[n]{x^2}$	

a.2.) *ERRADICAR*: extraer factores fuera del radical.

$$\sqrt{2 \cdot 3^2} = \left(2 \cdot 3^2\right)^{1/2} \underset{\substack{\text{Potencia} \\ \text{de un} \\ \text{producto}}}{=} 2^{1/2} \cdot \left(3^2\right)^{1/2} \underset{\substack{\text{Potencia} \\ \text{de una} \\ \text{potencia}}}{=} 2^{1/2} \cdot 3 = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{a^4 \cdot x^8} = \left(a^4 \cdot x^8\right)^{1/3} = a^{4/3} \cdot x^{8/3} = a^{1+\frac{1}{3}} \cdot x^{2+\frac{2}{3}} \underset{\substack{\text{Producto} \\ \text{de potencias} \\ \text{igual base}}}{=} \left(a \cdot a^{1/3}\right) \cdot \left(x^2 \cdot x^{2/3}\right) \underset{\text{Asociativa}}{=} a \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{128}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^7}{3^4}} = \left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{1/4} \underset{\substack{\text{Potencia} \\ \text{de un} \\ \text{cociente}}}{=} \frac{2^{7/4}}{3} = \frac{2^{1+\frac{3}{4}}}{3} \underset{\substack{\text{Producto} \\ \text{de potencias} \\ \text{igual base}}}{=} \frac{2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{2^3}$$

Pueden sacarse fuera del radical los factores que tienen exponente mayor o igual que el índice del radical. En este caso, se divide el exponente del radicando entre el índice del radical: el cociente es el exponente del factor extraído y el resto el exponente del factor dentro de la raíz.

Ejercicios:

1. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales.

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$\sqrt{18}$		$3\cdot\sqrt{48}$		$\sqrt[3]{16}$	
$\sqrt{9a^3}$		$\sqrt{50a^2b}$		$\sqrt{98a^3b^5c^7}$	
$2\cdot\sqrt{75x^4y^5}$		$3\cdot\sqrt{81x^3y^4}$		$2\cdot\sqrt[4]{243}$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{108a^5b^7}$		$\frac{1}{7}\cdot\sqrt{49x^3y^7}$		$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{27a^5m^7}$	
$\frac{3}{5}\cdot\sqrt{125mn^6}$		$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{128}$		$\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{27m^2n^8}$	
$2\cdot\sqrt[3]{16x^2y^7}$		$4\cdot\sqrt[3]{250a^3b^8}$		$2xy\cdot\sqrt[3]{128x^2y^8}$	
$5a\cdot\sqrt[3]{160x^7y^9z^{13}}$		$2a\cdot\sqrt{44\cdot a^3\cdot b^7\cdot c^9}$		$\sqrt[4]{80a^4b^5c^{12}}$	
$3\cdot\sqrt[4]{5x^8y^{14}z^{16}}$		$\frac{3}{2}\cdot\sqrt[4]{32mn^8}$		$\sqrt{\frac{27\cdot a^6\cdot m^3\cdot n^2}{392\cdot b^9\cdot c^2}}$	
$6\cdot\sqrt{\frac{5a^3}{24x^2}}$		$5\cdot\sqrt{\frac{9n^3}{5m^2}}$		$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{4a^2}{27y^3}}$	
$2b^2\cdot\sqrt[3]{\frac{125}{4b^5}}$		$\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{27x^4}{16a^2b^4}}$		$2xy\cdot\sqrt[4]{\frac{81a^9}{4x^5y^{12}}}$	

2. Simplifica:

$\sqrt{8}$; $\sqrt[4]{1296}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{1296}$; $\sqrt{512}$; $\sqrt[4]{160000}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt[3]{343000}$; $\sqrt[3]{128}$

El proceso contrario a la erradicación es introducir factores dentro del radical. Como acabamos de ver, erradicar simplifica los radicales, por lo que introducirlos los "complica" y, por tanto, no lo haremos casi nunca. Aún así, es importante saber cómo se introducen los factores, ya que, en ocasiones, puede resultar de utilidad.

$$\boxed{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 2^{1/2} \underset{\substack{\text{Producto}\\ \text{de potencias}\\ \text{igual base}}}{=} 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2+1}{2}} = \sqrt{2^{2+1}} \underset{\substack{\text{Producto}\\ \text{de potencias}\\ \text{igual base}}}{=} \sqrt{\boxed{2^2}\cdot 2} = \sqrt{2^3}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2} \underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de una}\\ \text{potencia}}}{=} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{1/3}\cdot\left(x^2\right)^{1/3} \underset{\substack{\text{Producto}\\ \text{de potencias}\\ \text{igual exponente}}}{=} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot x^2\right]^{1/3} = \sqrt[3]{\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cdot x^2} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{3^3}}$$

Para introducir un factor en una radical, se eleva dicho factor al índice de la raíz y lo escribimos ya dentro del radical multiplicando al radicando.

Ejercicio: Introducir dentro del radical todos los factores que se encuentren fuera de él.

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$3\cdot\sqrt{5}$		$2\cdot\sqrt{3}$		$2\cdot\sqrt{a}$	
$5a\cdot\sqrt{b}$		$3a\cdot\sqrt{2a^2}$		$3a^2\cdot\sqrt[3]{a^2b}$	
$5x^2y\cdot\sqrt{3}$		$ab^2\cdot\sqrt[5]{a^2b}$		$4m\cdot\sqrt[6]{2m^2}$	
$2a\cdot\sqrt[4]{8ab^3}$		$4a\cdot\sqrt{2xy}$		$5a^2\cdot\sqrt[8]{a^{-3}}$	
$a^{-5}x^{-1}\cdot\sqrt{a^3x^{-2}}$		$3n^3p\cdot\sqrt[5]{2m}$		$5xy^5\cdot\sqrt{x^3y}$	
$20a^3b^2\cdot\sqrt[3]{2b^2}$		$-7b^2\cdot\sqrt[7]{3a}$		$5mn^2p^3\cdot\sqrt{2m^3np^2}$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{8}$		$\frac{1}{10}a^2m^3\cdot\sqrt[3]{axm^3}$	
$\frac{1}{2}a^{-2}b\cdot\sqrt[3]{4abx}$		$\frac{1}{10}a^3\cdot\sqrt[3]{1000a^5b}$		$\frac{1}{3}a^{-2}x^5\cdot\sqrt[4]{9a^2x^{-3}}$	

(B) SUMA-RESTA DE RADICALES:

Las raíces que tienen el mismo índice y el mismo radicando (diferenciándose solamente en los coeficientes), se llaman *radicales semejantes*.

Ejemplos: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$; $5\cdot\sqrt[4]{3} = 5\cdot\sqrt[4]{3^2} = 5\cdot\sqrt{3}$; $\frac{-3}{8}\cdot\sqrt{3}$; $-7\cdot\sqrt{27} = -7\cdot\sqrt{3^3} = -7\cdot 3\cdot\sqrt{3} = -21\cdot\sqrt{3}$

Como pone de manifiesto el ejemplo anterior, hay ocasiones en las que, en apariencia, los radicales no son semejantes, pero después de simplificarlos sí lo son. Por tanto, siempre debemos realizar previamente el proceso de simplificación de las raíces.

Analicemos ahora las dos sumas siguientes: $\begin{cases}\sqrt{2}+\sqrt{3}\\ 2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}\end{cases}$.

En ambos, para realizar la operación que se plantea, debemos seguir las normas: primero la raíz, después la multiplicación y, por último, la suma. Ahora bien, existe una diferencia esencial entre ambos: los dos radicales de la primera cuenta NO son semejantes, mientras los dos de la segunda cuenta SÍ lo son, por lo que en el primer caso no podemos hacer nada (salvo cumplir las normas), mientras que en el segundo caso podemos sacar factor común la raíz (que es igual en los dos radicales): $2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}=(2+3)\cdot\sqrt{5}=5\cdot\sqrt{5}$ y escribir la suma de una forma más sencilla. Esto lo podremos hacer siempre que los radicales sean semejantes y, en este caso, como hemos visto, sumaremos o restaremos los coeficientes y dejaremos la misma parte radical.

Ejercicio: Sumar/restar los siguientes radicales:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}$		$\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$	
$\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\cdot\sqrt{75}$		$\sqrt{80}-2\cdot\sqrt{252}+3\cdot\sqrt{405}-3\cdot\sqrt{500}$	
$2\cdot\sqrt{450}+9\cdot\sqrt{12}-7\cdot\sqrt{48}-3\cdot\sqrt{98}$		$7\cdot\sqrt{450}-4\cdot\sqrt{320}+3\cdot\sqrt{80}-5\cdot\sqrt{800}$	
$\sqrt{20}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{45}+2\cdot\sqrt{125}$		$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}$	
$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{80}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{63}-\frac{1}{9}\cdot\sqrt{180}$		$5\cdot\sqrt{50}+\frac{3}{14}\cdot\sqrt{98}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{162}$	
$2\cdot\sqrt{45}-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{125}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{180}$		$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{18}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt{48}+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{72}$	
$\frac{3}{4}\cdot\sqrt{176}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{45}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{320}+\frac{1}{5}\cdot\sqrt{275}$		$\frac{1}{7}\cdot\sqrt{147}-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{700}+\frac{1}{10}\cdot\sqrt{28}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2187}$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{27}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{108}-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{300}$		$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}$	
$\sqrt[3]{875}+\sqrt[3]{448}+\sqrt[3]{189}$		$\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{1029}-\sqrt[3]{625}$	
$4\cdot\sqrt[3]{-320}-10\cdot\sqrt[3]{-40}-2\cdot\sqrt[3]{-54}+3\cdot\sqrt[3]{-1024}$		$3\cdot\sqrt[3]{-24}-4\cdot\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{-375}$	
$2\cdot\sqrt[3]{250}-4\cdot\sqrt[3]{24}-6\cdot\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2187}$		$3\cdot\sqrt[3]{108}+\frac{1}{10}\cdot\sqrt[3]{625}+\frac{1}{7}\cdot\sqrt[3]{1715}-4\cdot\sqrt[3]{32}$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{24}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{54}+\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{375}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{128}$		$\sqrt[3]{81}-3\cdot\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{686}+2\cdot\sqrt[3]{648}$	
$\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{625}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{192}+\frac{1}{7}\cdot\sqrt[3]{1715}-\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{1536}$		$5\cdot\sqrt[3]{48}-3\cdot\sqrt[3]{3645}-2\cdot\sqrt[3]{384}+4\cdot\sqrt[3]{1715}$	

(C) MULTIPLICACIÓN-DIVISIÓN DE RADICALES:

$$\left(2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(-5\cdot\sqrt{2}\right) \underset{\text{Asociativa}}{=} \left[2\cdot(-5)\right]\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right) = -10\cdot\left(3^{1/2}\cdot 2^{1/2}\right) \underset{\substack{\text{Producto}\\\text{potencias}\\\text{igual}\\\text{exponente}}}{=} -10\cdot 6^{1/2} = -10\cdot\sqrt{6}$$

$$\left(-2\cdot\sqrt[3]{4}\right):\left(7\cdot\sqrt{2}\right) = \frac{-2\cdot\sqrt[3]{2^2}}{7\cdot\sqrt{2}} = \frac{-2}{7}\cdot\frac{2^{2/3}}{2^{1/2}} \underset{\substack{\text{Cociente}\\\text{potencias}\\\text{igual}\\\text{exponente}}}{=} \frac{-2}{7}\cdot 2^{2/3-1/2} \underset{\substack{\text{Común d}^{\text{dor}}\\\text{(común índice)}}}{=} \frac{-2}{7}\cdot 2^{1/6} = \frac{-2}{7}\cdot\sqrt[6]{2}$$

Observamos, en los ejemplos anteriores, que hay que distinguir dos casos:

c.1.) *Radicales del mismo índice:*

- Multiplicamos-dividimos los coeficientes entre sí.
- Multiplicamos-dividimos, bajo un mismo radical común, los radicandos entre sí.
- Simplificamos el radical obtenido.

Ejercicio: Realizar las siguientes operaciones con radicales.

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$		$\left(5\cdot\sqrt{12}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{75}\right)$	
$\left(-2\cdot\sqrt{15}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{10}\right)$		$\left(5\cdot\sqrt{21}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}\right)$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\left(\frac{-2}{7}\cdot\sqrt{21}\right)$		$\left(3\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{14}\cdot\left(-2\cdot\sqrt{35}\right)$	
$\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{42}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\cdot\sqrt{22}\right)$		$\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}$	
$\left(\frac{-5}{6}\cdot\sqrt[3]{15}\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt[3]{50}\right)$		$\left(\frac{2}{-3}\cdot\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{6}\right)$	
$\left(3\cdot\sqrt[3]{45}\right)\cdot\left(\frac{-1}{6}\cdot\sqrt[3]{15}\right)\cdot\left(-4\cdot\sqrt[3]{20}\right)$		$\left(3\cdot\sqrt{ab}\right)\cdot\left(-2a\cdot\sqrt{b}\right)$	
$x\cdot\sqrt{2a}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5a}\right)$		$\left(2\cdot\sqrt{a^2x}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{a^3}$	
$\left(-\frac{1}{3}x^2\cdot\sqrt{5mn^2}\right)\cdot\left(9x\cdot\sqrt{2m^3n^2}\right)\cdot\left(-\sqrt{0{,}1m^2n^3}\right)$		$\sqrt[3]{9x^2y}\cdot\sqrt[3]{81x^5}$	
$\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3x}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}x}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{2x}\right)\cdot\left(-2\cdot\sqrt{2x}\right)$		$\left(\frac{-2}{3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^3}\right)\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot\sqrt[3]{2xy^4}\right)\cdot\sqrt[3]{4x^7y^6}$	
$\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{9a^2}\cdot\left(8\cdot\sqrt[3]{3ab}\right)$		$-2\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{ax}\right)$	
$\sqrt[3]{\frac{2x^4}{25y^5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4x^5}{5y}}$		$5a\cdot\sqrt[7]{2mx^3}\cdot\left(-3a\cdot\sqrt[7]{16m^4x^6}\right)\cdot\sqrt[7]{m^5x}$	
$\left(\frac{12}{-5}\cdot\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\frac{15}{21}\cdot\sqrt[4]{32}\right)$		$\left(\frac{1}{-6}\cdot\sqrt[5]{7^3}\right)\cdot\left(\frac{15}{-7}\cdot\sqrt[5]{49}\right)$	

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$\left(4\cdot\sqrt{6}\right):\left(2\cdot\sqrt{3}\right)$		$\left(-2\cdot\sqrt{50}\right):\left(6\cdot\sqrt{24}\right)$	
$20\cdot\sqrt{2}:\left(2\cdot\sqrt{4}\right)$		$12\cdot\sqrt{3}:\left(-4\cdot\sqrt{3}\right)$	
$\sqrt{18}:\sqrt{25}$		$-7\cdot\sqrt{13}:\left(28\cdot\sqrt{26}\right)$	
$\left(-9\cdot\sqrt{8}\right):\sqrt{2}$		$-2\cdot\sqrt{50}:\left(-\sqrt{5}\right)$	
$\sqrt[3]{88}:\sqrt[3]{11}$		$\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{3}$	
$2\cdot\sqrt{3a}:\left(10\cdot\sqrt{a}\right)$		$-\sqrt{75x^2y^3}:\left(5\cdot\sqrt{3xy}\right)$	
$4x\cdot\sqrt{a^3x^2}:\left(-2\cdot\sqrt{a^2x^3}\right)$		$-3\cdot\sqrt[3]{16a^5}:\left(4\cdot\sqrt[3]{2a^2}\right)$	
$\left(\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{3xy}\right):\left(\frac{3}{-4}\cdot\sqrt{x}\right)$		$\frac{3}{5}ab\cdot\sqrt{12x^{-4}y^3z}:\left(-\sqrt{6x^2y^5}\right)$	
$2\cdot\sqrt[3]{81x^2}:\left(-3\cdot\sqrt[3]{3x^2}\right)$		$-2\cdot\sqrt[3]{5x^{11}y^{10}z^5}:\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{0,1x^{-4}y^3z^7}\right)$	
$\left(\frac{2a}{-3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right):\left(\frac{-a}{3x^2}\cdot\sqrt[3]{x^3}\right)$		$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{x^3}:\sqrt[4]{16x^{-5}}$	
$2\cdot\sqrt[5]{xy}:\left(-3\cdot\sqrt[5]{x^{-2}}\right)$		$\sqrt[7]{ab^3c}:\left(-\sqrt[7]{a^2b^5}\right)$	
$-2\cdot\sqrt[7]{m^5x^2}:\left(4\cdot\sqrt[7]{mx}\right)$		$\left(\frac{-4}{3}\cdot\sqrt[10]{2x^5}\right):\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[10]{4x^2}\right)$	

c.2.) *Radicales de distinto índice:*

- Reducimos los radicales a común índice.
- Multiplicamos-dividimos como radicales del mismo índice.

Ejercicio: Realizar las siguientes operaciones con radicales.

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$		$3\cdot\sqrt{2ab}\cdot 4\cdot\sqrt[4]{8a^3}$	
$5\cdot\sqrt{2a}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$		$\sqrt[3]{9x^2y}\cdot\sqrt[6]{81x^5}$	
$\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot\sqrt[4]{3a^3b}$		$\sqrt[4]{25x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{125x^2}$	
$-\frac{5}{3}a^2b\cdot\sqrt{ab^3}\cdot\left(-\frac{3}{a}\cdot\sqrt{a^2b}\right)$		$\left(\frac{2}{-3}\cdot\sqrt[4]{4m^2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\cdot\sqrt[5]{16m^4n}\right)$	
$3ab\cdot\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\left(\frac{3}{a}\cdot\sqrt[3]{a^2b}\right)$		$-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{abc}\cdot\left(-2\cdot\sqrt[3]{bc^{-1}}\right)\cdot\left(\frac{3}{-2}\cdot\sqrt{a^{-3}c^5}\right)$	
$\sqrt{\frac{1}{2}x^3}\cdot 5\cdot\sqrt[3]{3x^{-1}y^4}\cdot 0,1\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{3}x^4y^{-1}}$		$-0,1\cdot\sqrt{\frac{1}{3}a^3b^{12}}\cdot\sqrt[3]{3a^4b^5c^{10}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}a^7b^{14}c^{12}}$	
$\sqrt{\frac{1}{2}x^3}\cdot\left(5\cdot\sqrt[3]{2x^{-1}y^4}\right)\cdot\left(0,1\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{3}x^4y^{-4}}\right)$		$\frac{9}{4}\cdot\sqrt[10]{b^5x^9y^3z^7}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{a^2x^2y^2z}\right)$	
$\sqrt{9x}:\sqrt[3]{3x^2}$		$\sqrt[3]{8a^3b}:\sqrt[4]{4a^2}$	
$\sqrt[3]{5m^2n}:\sqrt[5]{m^3n^2}$		$\sqrt[3]{3m^4}:\sqrt[9]{27m^2}$	
$\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}:\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}$		$2a\cdot\sqrt[4]{3x^2y}:\left(6a^2\cdot\sqrt[6]{x^5y^2}\right)$	
$\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[4]{2a}$		$2a\cdot\sqrt[4]{3x^2y}:6a^2\cdot\sqrt[6]{x^5y^2}$	
$\sqrt{3x^5y^4}:\left(-\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^2y^3}\right)$		$\left(\frac{4}{5}\cdot\sqrt[3]{4ab}\right):\left(\frac{-1}{10}\cdot\sqrt{2a^2}\right)$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x}:\left(\frac{-1}{4}\cdot\sqrt[6]{16x^4}\right)$		$-\sqrt[5]{\frac{4x^3y^2}{mz^5}}:\left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2y}{2mz}}\right)$	
$\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{2}x^3y^2z}:\left(2\cdot\sqrt[6]{0,4x^2y^4z^9}\right)$		$\frac{1}{5}\cdot\sqrt[9]{a^3x^2y^{-1}}:\left(-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{a^4x^{-1}z^{-3}}\right)$	
$-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}m^2n^4y^{-3}}:\left(-\sqrt[5]{0,16m^5n^3y^{-2}}\right)$		$\frac{9}{4}\cdot\sqrt[10]{b^5x^9y^3z^7}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{a^2x^2y^2z}\right)\cdot\left(-6\cdot\sqrt[5]{a^4b^2x^4z^3}\right)$	
$\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2y^3z}\cdot\sqrt[4]{3x^5y^2z^3}\cdot\sqrt{8xy^6z^2}$		$2\cdot\sqrt{m^3n^2p^4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{m^{-2}n^4p^7}\right)\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\sqrt[8]{m^{-2}n^{-1}}\right)$	
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[9]{\frac{4}{3}a^5b^6z^3}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}ab^4c}\right)\cdot\left(-3\cdot\sqrt[6]{\frac{8}{9}a^5c^3z^4}\right)$			
$\left(-3\cdot\sqrt[5]{4m^3p^4}\right)\cdot\left(\frac{4}{-5}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}m^{-4}p^2x^3}\right)\cdot\left(\frac{-1}{6}\cdot\sqrt[10]{2mp^5x^{-2}}\right)$			

(D) <u>RACIONALIZACIÓN</u>*:* quitar el radical del denominador.

¿Por qué es necesario quitar la raíz de un denominador? Podemos observar que en los ejemplos y ejercicios que hemos planteado de división de radicales, en ocasiones, una vez realizado el cociente, obtenemos un radical cuyo radicando es una fracción. El proceso de racionalización nos permite obtener siempre un radical en el que el radicando es una "expresión entera" (sin fracciones). Además, si trabajamos con números y pretendemos calcular el valor aproximado de una raíz de una fracción, podemos observar lo siguiente (trabajamos en cada paso con un redondeo en diezmilésimas):

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0'666666...} \approx \sqrt{0'6667} \approx 0'8165169$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de un}\\ \text{cociente}}}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx \frac{1'4142}{1'7321} \approx 0'8166556$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{de un}\\ \text{cociente}}}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \underset{\text{Racionalizar}}{=} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{2'4495}{3} = 0'8165$$

Si realizamos cualquiera de las cuentas anteriores en la calculadora, y trabajamos con todos los decimales, obtenemos ***0'8164965***. Por tanto, de los tres resultados anteriores, el que más se aproxima al valor real de la expresión es el tercero. Con el proceso de racionalización, hemos evitado realizar redondeos hasta el final, de forma que los errores no se van acumulando y, por eso, tenemos una mayor precisión. Todo esto justifica el hecho de que merezca la pena racionalizar expresiones radicales aunque, como veremos a continuación, no siempre será posible hacerlo. Sólo hay tres casos (que se pueden reducir a dos, puesto que el primero es una caso particular del segundo) en que es posible conseguir lo que buscamos, pero merece la pena estudiarlos.

d.1.) *1er Caso:* cuando en el denominador hay una raíz cuadrada.

Ejemplos:

$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{y\cdot\sqrt{2}}{2}$	$\frac{x}{4\cdot\sqrt{x}} = \frac{x}{4\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\cdot\sqrt{x}}{4\cdot\sqrt{x^2}} = \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{x}}{4\cancel{x}} = \frac{\sqrt{x}}{4}$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$	$\frac{\sqrt[3]{n}}{2\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{n^2}\cdot\sqrt[6]{a^3}}{2\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt[6]{n^2\cdot a^3}}{2\cdot a}$

Por tanto, para racionalizar una raíz cuadrada bastará multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número, en éste caso por el denominador.

d.2.) 2^{do} *Caso*: el radical del denominador no es una raíz cuadrada (tiene índice mayor que 2).
Ejemplos:

$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$	$\frac{14}{\sqrt[6]{7^5}}=\frac{14}{\sqrt[6]{7^5}}\cdot\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{14\cdot\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^6}}=\frac{14\cdot\sqrt[6]{7}}{7}=2\cdot\sqrt[6]{7}$
$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{b}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{b}}\cdot\frac{\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{b^4}}=\frac{\sqrt[15]{x^5}\cdot\sqrt[15]{b^{12}}}{\sqrt[5]{b^5}}=\frac{\sqrt[15]{x^5\cdot b^{12}}}{b}$	$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{a^2x^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{a^2x^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{a^3x^2}}{\sqrt[5]{a^3x^2}}=\frac{\sqrt[5]{a^3x^6}}{\sqrt[5]{a^5x^5}}=\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt[5]{a^3x}}{a\cancel{x}}=\frac{\sqrt[5]{a^3x}}{a}$

Por tanto, para racionalizar una raíz no cuadrada bastará con multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número, en este caso otro radical del mismo índice y radicando que el denominador, aunque con el exponente del radicando igual a la diferencia entre el índice y el exponente del radicando que pretendemos racionalizar.

d.3.) 3^{er} *Caso:* el d^{dor} es una suma/resta de expresiones, al menos una radical (<u>de índice dos</u>).
Ejemplos:

$$I)\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}=\frac{9-2\cdot\sqrt{14}}{5}$$

$$II)\ \frac{4}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{4}{\left(3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\left(3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=\frac{12\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{5}}{13}$$

$$III)\ \frac{a}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{a}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}$$

$$IV)\ \frac{9\cdot\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{9\cdot\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)}=\frac{9x\cdot\sqrt{x}+9x}{x^2-x}=\frac{9\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x}\cdot\left(x-1\right)}=\frac{9\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$$

Si tenemos una expresión que es una suma/resta de dos cantidades, su *expresión conjugada* es otra expresión igual salvo en el signo existente entre las dos cantidades, que en una es opuesto que en la otra. Por ejemplo:

$$x-\sqrt{x}\ \underset{\text{expresión conjugada}}{\longrightarrow}\ x+\sqrt{x}\quad;\quad\sqrt{m}+\sqrt{n}\ \underset{\text{expresión conjugada}}{\longrightarrow}\ \sqrt{m}-\sqrt{n}$$

$$3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\ \underset{\text{expresión conjugada}}{\longrightarrow}\ 3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\quad;\quad\sqrt{7}+5\cdot\sqrt[3]{2}\ \underset{\text{expresión conjugada}}{\longrightarrow}\ \sqrt{7}-5\cdot\sqrt[3]{2}$$

Por tanto, para racionalizar una suma/resta de expresiones, al menos una de ellas radical (de índice dos), bastará con multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número, en este caso la *expresión conjugada* del denominador.

Ejercicio: Racionalizar el denominador de los siguientes cocientes.

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$\frac{2}{\sqrt{7}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{-5}{\sqrt{2}}$	
$\frac{3}{\sqrt{15}}$		$\frac{-12}{3\cdot\sqrt{6}}$		$\frac{33}{\sqrt{33}}$	
$\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{5}}$		$\frac{a}{\sqrt{b}}$		$\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$	
$\frac{5n^2}{3\cdot\sqrt{mn}}$		$\frac{2x\cdot\sqrt[3]{4y}}{3y\cdot\sqrt{2x}}$			
$\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}$		$\frac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$		$\frac{\sqrt{3c^2}}{\sqrt[3]{9c}}$	
$\frac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$		$\frac{-6}{5\cdot\sqrt[3]{3x}}$		$\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$	
$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9a}}$		$\frac{-2x}{5a\cdot\sqrt[4]{25x^3}}$		$\frac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$	
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{7}}$		$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[5]{8a^4}}$		$\frac{-12}{\sqrt[5]{8a^2b}}$	
$-\frac{2}{\sqrt[6]{16}}$		$\frac{3\cdot\sqrt[6]{bc^2}}{\sqrt[6]{a^5b^6c^2}}$		$\frac{3mn}{\sqrt[6]{27mn^4}}$	
$\frac{18x}{\sqrt[7]{32x^3y^2}}$		$\frac{3n}{\sqrt[7]{a^4b^5c^2}}$			

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x}}$		$\dfrac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$		$\dfrac{\sqrt{3c^2}}{\sqrt[3]{9c}}$	
$\dfrac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$		$\dfrac{-6}{5\cdot\sqrt[3]{3x}}$		$\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}$	
$\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9a}}$		$\dfrac{-2x}{5a\cdot\sqrt[4]{25x^3}}$		$\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$	
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{7}}$		$\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[5]{8a^4}}$		$\dfrac{-12}{\sqrt[5]{8a^2b}}$	
$-\dfrac{2}{\sqrt[6]{16}}$		$\dfrac{3\cdot\sqrt[6]{bc^2}}{\sqrt[6]{a^5b^6c^2}}$		$\dfrac{3mn}{\sqrt[6]{27mn^4}}$	
$\dfrac{18x}{\sqrt[7]{32x^3y^2}}$		$\dfrac{3n}{\sqrt[7]{a^4b^5c^2}}$			

RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.	RADICAL	SOL.
$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$		$\frac{5}{4-\sqrt{11}}$		$\frac{2}{1-\sqrt{7}}$	
$\frac{4}{\sqrt{2}-1}$		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$		$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$	
$\frac{11}{2\cdot\sqrt{3}-1}$		$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$		$\frac{5+\sqrt{11}}{5-\sqrt{11}}$	
$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$		$\frac{5-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-5}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$	
$\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$		$\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$		$\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}$	
$\frac{5+2\cdot\sqrt{2}}{4-\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}$	
$\frac{3+2\cdot\sqrt{3}}{3-2\cdot\sqrt{3}}$		$\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\cdot\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7+2\cdot\sqrt{10}}$	
$\frac{9\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{6-\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$		$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$	
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$		$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$	
$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$		$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$	
$\frac{\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}}$		$\frac{2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}}{-2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{7}-\sqrt{2}}$	
$\frac{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}}$		$\frac{2\cdot\sqrt{7}-3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}}$	
$\frac{19}{5\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{3}}$		$\frac{3\cdot\sqrt{2}}{7\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}$		$\frac{2\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}}$	
$\frac{\sqrt{7}+3\cdot\sqrt{11}}{5\cdot\sqrt{7}+4\cdot\sqrt{11}}$		$\frac{\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}}$		$\frac{5\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3}}$	
$\frac{2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}$		$\frac{4\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{7}}$		$\frac{5\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3}}$	

6.5. Ejercicios variados.

1. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$		$\left(7\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\sqrt{3}$	
$\left(2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(-4\cdot\sqrt{15}\right)$		$\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+5\cdot\sqrt{2}\right)$	
$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}\right)$		$\left(\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$	
$\left(3\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{7}\right)$		$\left(-\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}\right)$	
$\left(7\cdot\sqrt{5}-11\cdot\sqrt{7}\right)\cdot\left(-5\cdot\sqrt{5}-8\cdot\sqrt{7}\right)$		$\left(3\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$	
$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{ab}$		$\left(2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{x}$	
$\left(\sqrt{a}-\sqrt{2ab}\right)\cdot\left(-3\cdot\sqrt{a}\right)$		$\left(\sqrt{a}-2\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)$	
$\left(4\cdot\sqrt{\frac{1}{4}y}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{x}$		$\left(\sqrt[3]{27a^2b}+\sqrt[3]{125ab^2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{-3}\cdot\sqrt[3]{a}\right)$	

2. Expresa como raíces las siguientes potencias:

   a) $6^{\frac{5}{6}}$ b) $2^{\frac{10}{13}}$ c) $12^{\frac{4}{5}}$

3. Expresa como potencia de exponente fraccionario:

   a) $\sqrt[5]{3^3}$ b) $\sqrt[12]{5^7}$ c) $\sqrt[15]{b^{11}}$

4. Calcula : a) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ b) $16^{-\frac{3}{2}}$ c) $81^{0,25}$ d) $\dfrac{6^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6}}{6^{\frac{3}{2}}}$

   e) $625^{-\frac{1}{4}}$ f) $9^{\frac{3}{2}}$ g) $\dfrac{7^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{7}}{7^{\frac{3}{2}}}$

5. Calcula: a) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ b) $5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$

6. Calcula: a) $\sqrt{20}+3\cdot\sqrt{5}$ b) $\sqrt{12}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{24}}{2}-\frac{\sqrt{54}}{3}+\frac{\sqrt{216}}{6}-\frac{\sqrt{384}}{4}$

   d) $\sqrt{75}-3\sqrt{27}+4\sqrt{48}-10\sqrt{3}$ e) $\sqrt{20}+\sqrt{27}-2\sqrt{45}+\sqrt{48}$

7. Calcula: a) $\left(\sqrt{3}+5\right)^2$ b) $\left(4-\sqrt{2}\right)^2$ c) $\left(2^{-4}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^4$

   d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}$ e) $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^{-1}}}$ f) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$

   g) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$ h) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{32}$ i) $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{16}}$ j) $\dfrac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[3]{5}}$

8. Ordena los números siguientes sin utilizar la calculadora: $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[6]{5}$

9. Escribe en una sola raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}$

10. Calcula y expresa el resultado en forma de potencia de base un nº entero:

    a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{3}}$

11. Opera y simplifica: $\sqrt{2\cdot a^3\cdot b}\cdot\sqrt{8\cdot a\cdot b^6}$

12. Racionaliza las expresiones siguientes:

    a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

    e) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3^3}}$ f) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{2^3}}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

    i) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$ j) $\dfrac{6-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ k) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ l) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

    m) $\dfrac{7-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$ n) $\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

13. Opera: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

14. Racionaliza y calcula la expresión decimal de: $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$